



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta humanitních studií

Logika, množiny, relace

Mgr. Marie Pavelková



Zlín, 2018

POPIS PŘEDMĚTU

Bakalářský studijní program: Učitelství pro mateřské

školy Předmět: Logika, množiny, relace

Forma studia: kombinovaná

Rozsah distanční výuky: 15 hodin

Zařazení výuky: 1. ročník, letní semestr

Forma výuky: seminář, cvičení

Ukončení: klasifikovaný zápočet

Vyučující: Mgr. Lubomír Sedláček, Ph.D.

PaedDr. Lucia Ficová Ph.D.

Mgr. Marie Pavelková

Stručná anotace předmětu:

Rozšíření a zevšeobecnění středoškolského učiva matematiky, především základních poznatků z logiky a elementární teorie množin, které jsou východiskem pro rozvoj matematických představ. Důraz je kladen na budování a třídění matematických pojmů: výrok, operace s výroky, množina, množinové operace, relace, zobrazení; hledání souvislostí mezi nimi, osvojením si přesné matematické terminologie, symboliky a myšlenkových postupů, které vedou k ověřování zákonitostí a systematizací poznatků.

Obsah

ÚVOD	4
1 VSTUP DO HISTORIE LOGIKY	5
1.1 LOGIKA Z POHLEDU SÉMANTIKY.....	7
1.2 MEGARSKO-STOICKÁ ŠKOLA	7
2 LOGIKA.....	8
2.1 DĚLENÍ LOGIKY	8
3 MATEMATICKÁ LOGIKA.....	10
3.1 VÝROKOVÁ LOGIKA.....	10
3.2 VÝROK.....	10
3.3 SLOŽENÉ VÝROKY	11
3.3.1 NEGACE	11
3.3.2 IMPLIKACE.....	13
3.3.3 EKVIVALENCE	15
3.4 FORMULE.....	16
3.5 ATOMICKÝ VÝROK	16
3.6 TAUTOLOGIE	17
3.7 KONTRADIKCE	17
3.8 SPLNITELNÁ FORMULE	18
3.9 KVANTIFIKÁTORY	18
3.9.1 VELKÝ KVANTIFIKÁTOR	18
3.9.2 MALÝ KVANTIFIKÁTOR	19
4 MNOŽINY	20
4.1 ZNAČENÍ MNOŽIN	20
4.2 URČENÍ MNOŽINY	20
4.2.1 DEFINOVÁNÍ MNOŽINY VÝČTEM JEJÍCH PRVKŮ	20
4.2.2 DEFINOVÁNÍ MNOŽINY POMOCÍ CHARAKTERISTICKÉ VLASTNOSTI	21
4.3 PODMNOŽINA MNOŽINY	21
4.4 ROVNOST MNOŽIN	21
5 OPERACE MEZI MNOŽINAMI	22
5.1 SJEDNOCENÍ MNOŽIN	22
5.2 PRŮNIK MNOŽIN	23
5.3 ROZDÍL MNOŽIN.....	23
5.4 DOPLŇEK MNOŽINY	24
5.5 VLASTNOSTI MNOŽINY	24
6 BINÁRNÍ RELACE	25
6.1 BINÁRNÍ RELACE	25
ZÁVĚR.....	27
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	28



ÚVOD

Předmět Logika, množiny, relace připravuje studenty oboru Učitelství pro mateřské školy teoreticky na oblast matematiky v edukaci mateřské školy. Logika má zde zásadní místo, protože se děti seznamují se světem kolem sebe a jejich prelogické myšlení prochází velkou změnou. Postupně se stává logickým.

Tato studijní opora si klade za cíl shrnout úvod do teorie logiky, množin, výrokové logiky a binárních relací. Je pro studenta podkladem pro práci s dětmi a základní osnovou jeho studia. Základ položený v této studijní opoře je také pomůckou k určování matematických vztahů, které lze identifikovat ve výchovně vzdělávacím procesu v mateřské škole.

Po prostudování by měl být student schopen porozumět oblasti výrokové logiky, binárních relací a množin v intencích mateřské školy.



1 VSTUP DO HISTORIE LOGIKY

Základy logiky se datují do 4. stol př. n. l. do antického Řecka. Lidé však mysleli logicky podstatně dříve. Již od prvopočátku lidské existence musel člověk vyvozovat závěry na základě logických kroků, které udělal. Logické uvažování člověka je velmi silně spjato také s mezilidskou komunikací. Postupný přechod od smyslového způsobu vyjadřování až po jazykovou formu komunikace. Prvopočátky logiky můžeme také nacházet v Číně, kde se velmi silně rozvíjí nauka o definování a o klasifikaci logiky. A také Indie byla průkopová v oblasti poznávání a zaměřila se na nauku o úsudcích. Tyto oblasti ale byly velmi ovlivněny náboženstvím, proto se v té době plně logika jako věda neutvářela.

Období Aristotela se ale nevyznačovalo typicky jen rozvojem již výše zmíněné oblasti logiky ale také etikou, filosofií, která je s logikou úzce spojena. Tento trojúhelník, který byl velmi vázán již na Zénona, je základem filozofie, která je také prvopočátkem matematiky. Platón, Sokrates a Aristoteles byli u zrodu prvních teorií dotýkajících se geometrie a aritmetiky. Velmi zásadní ve vývoji logiky byl Diodóros Kronos. Aristotelské období je možno dělit následujícím způsobem:

1. Přípravné období;
2. Aristotelsko – megarsko - stoické (polovina 4. století př. n. l. - konec 3. století př. n. l.);
3. Období komentátorů (začátek 2. století př. n. l. - 6. století n. l.).

Nejvýznamnější osobností byl Aristotelés ze Stageiry (383 - 322 př. n. l.), který studoval na Platónově akademii v Athénách. Řadíme ho mezi řecké filozofy. Od svého učitele Sokrata převzal dialog, jako základní pilíř tvorby nového objevu. Sam už byl ale typický tím, že žákům přednášel (Polák, 2014). Proslavil se jeho životním dílem Organon. Toto dílo je rozděleno do částí:

1. Kategorie
2. O vyjadřování
3. První analytiky
4. Druhé analytiky
5. Topiky



Aristoteles se proslavil ještě mnohými dalšími spisy, ale jako zásadní můžeme uvádět „*O vyjadřování*“. Toto dílo je založeno na tvorbě a identifikaci soudů a nejjednodušším predikátovým soudem, který můžeme použít je oznamovací věta (Zavřel, 2010). Jednoduché věty určují dvě hlediska: 1) kvalitu 2) kvantitu. Z oblasti kvantity pro logiku jsou podle něj podstatné pouze **věty oznamovací** – pravdivé/nepravdivé. Tyto věty nazývá **výroky**. **Výroky kladné** – přisuzujeme (*lidé jsou živočichové*). *Je to věta, o které lze rozhodnout na základě lidského úsudku, říci jistý závěr.* **Záporné výroky** – popíráme (*lidé nejsou okřídlení*). Také lze rozhodnout, zda je tento výrok pravdivý či nepravdivý. Podle kvantity: **Obecné** (*každý člověk je živočich*) a **částečné** (*někteří lidé jsou moudří*).

- 4 základní formy výroků:

1. **Obecné kladné** (*Každé zvíře je živočich.*)
2. **Obecné záporné** (*Žádný člověk není nesmrtelný.*)
3. **Částečné kladné** (*Někteří lidé jsou hloupí.*)
4. **Částečné záporné** (*Někteří lidé nejsou hloupí.*)

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| 1. Obecný kladný | Každé H je Z; |
| 2. Obecný záporný | Žádné H není Z; |
| 3. Částečný kladný | Některá H jsou Z; |
| 4. Částečný záporný | Některá H nejsou Z. |

Tuto teorii prezentoval ve 2. století př. n. l. Boethilo – **logický čtverec**

- **Kontradikce** – 1. pravdivý, 2. nepravdivý

(*P – Každý kos je pták. N – Některí kosové nejsou ptáci.*)

- **Kontrárnost** – maximálně 1 pravdivý

(*N – Každý člověk je doktor. N – Žádný člověk není doktor.*)

- **Subkontrárnost** – minimálně 1 pravdivý

(*P – Některí lidé jsou rodiče. P – Některí lidé nejsou rodiče.*)

- **Subalternace** – z pravdivosti vyššího, usoudíme pravdivost nižšího



(P – Každý člověk je smrtelný. P – Někteří lidé jsou smrtelní.) Pro přehledné zobrazení těchto vztahů se ve středověku používal tzv. logický čtverec.

Nejvýznamnější vak byl ale Aristotelův konstrukt formální logiky. Je zde typická jasnost, přehlednost a systém, který skrýval jednoduchost (Šedivý, 1984).

1.1 Logika z pohledu sémantiky

Sémantika vět z pohledu výrokové logiky je smysl či jistý význam daného sdělení či vyjádření, o kterém má smysl mluvit (Pártová, 2004).

Metoda protipříkladu

- z pravdivého předpokladu nelze usoudit nepravdivý závěr,
- z nepravdivého předpokladu lze usoudit pravdivý závěr,
- slouží k prokázání nesprávnosti sylogismu.

1.2 Megarsko-stoická škola

- 4 typy složených výroků:
 - **Implikace:** „Jestliže něco, pak ono.“
 - **Konjunkce:** „To a ono.“
 - **Disjunkce:** „Bud’ něco, nebo ono.“
 - **Negace:** „Není pravda, že...“; „nikoliv“; „ne“

Pohled sémantický určuje, za jakých podmínek je výrok pravdivý.



2 LOGIKA

Logika je součástí každodenního života člověka. Na základě logického úsudku se lidé rozhodují v každodenních situacích. Často se setkáváme se situací, kdy si řekneme, nebo nám někdo říká známé tvrzení a hlavou nám plyne věta: To je přece logika! Logické uvažování a usuzování je součástí našeho každodenního jednání. Mnohdy však ani nepřemýšlíme nad tím, co slovo logika vlastně znamená, a na co upozorňuje. Všeobecně je však nutno konstatovat, se jedná o určitý myšlenkový postup, který na základě několika vedlejších faktů vede k určitému závěru. Tyto závěry tvoříme na základě rychlého uvažování a usuzování. Můžeme vést příklad z každodenního života. Čekáme na trolejbusové stanici, jedou trolejbusy různého označení, našim úkolem je rozhodnout se pro jeden. Spontánně tedy reagujeme na základě naší zkušenosti a kroky, vedoucí k úsudku si neuvědomujeme (Kaslová, 2010).

Pojem či slovo logika pochází z řeckého „logos“, což má v překladu více významů: řeč, slovo, myšlenka, rozum, smysl atd. Za jejího zakladatele je považován Aristoteles, který se ve svém díle *Organon*, zabýval několika typy uvažování a následně je dělí na správné a nesprávné. (Sochor, 2001)

Literatura se může shodnout na tom, že logika je věda, která se zabývá usuzováním, pravdivostí, dokazatelností a vyvratitelností. Přitom všem jde v logice pouze o formu sdělení, nezajímá nás, co konkrétně je sdělováno, stejně jako nás nezajímají různé psychologické interpretace a intence, se kterými se daná situace spojuje. Můžeme tedy říci, že se jedná o vědu, která do určité míry zkoumá pravdivost našeho usuzování, tedy to jak usuzujeme (Šedivý, Lukátšová, Odvárko & Zöldy, 1970).

2.1 Dělení logiky

Logiku můžeme rozdělit na klasickou a neklasickou. Klasickou logikou rozumíme logiku, kdy předpokládáme, že tvrzení je buď pravdivé, nebo naopak nepravdivé. Tudíž předpokládáme tvrzení a jeho negaci. Můžeme říci, že tvrzení může nabýt dvou pravdivostních hodnot – pravda nebo nepravda a žádná jiná třetí možnost neexistuje (Trlifajová & Vašata, 2013). Neklasickou logikou potom tedy rozumíme logiku, která se snaží zákon o neexistující třetí možnosti zneplatnit či alespoň zeslabit. Často mluvíme o tzv. trojhodnotové logice, kdy tvrzení mohou nabývat více pravdivostních hodnot. Do této skupiny logik patří například tzv. fuzzy logika, která dovoluje, aby pravdivostní hodnota výroku nabývala hod-



noty libovolného reálného čísla od 0 až po 1. Dalším příkladem je třeba modální logika (Trlifajová & Vašata, 2013). Tato logika potom navazuje na výrokovou logiku, u které my určujeme pravdivostní hodnoty daných výroků.



3 MATEMATICKÁ LOGIKA

Matematika se zrodila z dialogu. Je proto velmi důležité verbalizovat matematické operace a také výroky a výrokové formule, které používáme při matematických úkonech. Jedním z podoborů klasické logiky, tedy logiky, kde žádná třetí možnost neplatí je matematická logika. Jindy se také označuje jako **logika výroková**. Sochor odkazuje na to, že samo „*slovní spojení matematická logika má zdůraznit, že pro zkoumání našeho uvažování se často používají metody běžné v matematice.*“ (Sochor, 2001 str. 9)

Můžeme konstatovat, že matematika je tedy všude kolem nás a my se snažíme realitu popsat pomocí výroků. Matematická logika jako věda slouží jako nástroj, pomocí kterého přesně vyjadřujeme určité matematické fakty (Klíč, 2007). Můžeme tedy usoudit, že o matematickou logiku se jedná, pokud používáme určité matematické metody a postupy. Tyto postupy mají své pravidla a neměnné kroky.

3.1 Výroková logika

Základem výrokové logiky je výrok nebo tvrzení. Je to oznamovací věta, o které můžeme rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé (Partová, 2004). Výrok je vyjadřovací prostředek matematiky, se kterým se setkáváme ve většině matematických vět a vyjádření a taktéž v matematické terminologii. Výroková logika vznikla na základě paradoxů, se kterými se v našem životě běžně setkáváme. Ve výrokové logice používáme pro zápis tzv. jazyk matematiky, kam patří: predikátové symboly, logické spojky a kvantifikátory. Tyto symboly nazýváme logickými symboly či logickými spojkami (Bušek, 1999).

3.2 Výrok

Základem výrokové (matematické) logiky je výrok. Výrokem rozumíme větu, která má dvě hodnoty, a my musíme rozhodnout o pravdivostní hodnotě. Rozhodujeme o jeho pravdivosti (1) nebo nepravdivosti (0). Žádná jiná možnost u výrokové logiky neexistuje, neboť v klasické logice počítáme s principem vyloučeného třetího, který se nazývá *tertium non datur*. Výrok tedy chápeme jako oznamovací větu, nikoli otázku či větu rozkazovací. Prvotní výroky, které chápeme jako jednoduché oznamovací věty a jsme schopni určit jejich pravdivostní hodnotu, označujeme velkými písmeny A, B atd. (Trlifajová & Vašata 2013)

Příklady prvotních výroků:



- A. 2 je menší než 5.
- B. Miloš Zeman je český prezident.
- C. Je rok 2018.

Pravdivostní hodnota výroku – dvouhodnotová logika

Ve výrokové logice rozhodujeme, zda se jedná o výrok pravdivý nebo nepravdivý, můžeme přiřadit jeho pravdivostní ohodnocení. Pravdivému výroku přiřazujeme pravdivostní ohodnocení 1 a nepravdivému výroku přiřazujeme číslo 0. Mluvíme tedy o tzv. **pravdivostní hodnotě výroku**. V takovém případě, kdy můžeme výroku přiřadit právě jednu ze dvou pravdivostních ohodnocení (0, nebo 1), mluvíme o tzv. dvouhodnotové logice. (Klíč, 2007)

3.3 Složené výroky

Výrokem nemusí být jen jedno jediné tvrzení, ale můžeme zjistit více informací a tedy i pracovat s více výroky. Ze základních (prvotních, či jednoduchých) výroků lze pomocí logických operací vytvořit další složitější výroky, které nazýváme **výroky složené**. Nyní je ale důležité poznamenat, že v zásadě nezáleží na vlastním obsahu slov daného výroku. Používáme k tomu logické spojky, které odpovídají danému složenému výroku. Kupříkladu, jak uvádí Pártová: $\vee$ (a nebo), $\wedge$ (a, a současně), $\Rightarrow$ (pokud, tak potom), $\Leftrightarrow$ (právě tehdy, když) (Pártová, 2004).

3.3.1 Negace

Negaci značíme symbolem $\neg$. O negaci výroku A mluvíme tehdy, když:

1. *Není pravda, že A.*
2. *Neplatí A.*
3. *Ne-A.* (Jedná se o změnu slovesa, přidáním předpony „ne-“)

„Negace $\neg A$ výroku A je takový výrok, že pro každé ohodnocení, při kterém je A pravdivý, je $\neg A$ nepravdivý a naopak“. Příkladem může být negace výroku: „*Dnes jsem dostal jedničku*“ a negace výroku je, „*Není pravda, že jsem dnes dostal jedničku*“.

Příklady negací výroků:

- A. 2 je menší než 5.
- B. Miloš Zeman je český prezident.
- C. Je rok 2017.



$\neg A$. Není pravda, že Miloš Zeman je český prezident. (0)

$\neg B$. Není rok 2017. (1)

Na základě následující tabulky, můžeme jasně pochopit, že pokud je původní výrok A pravdivý (1), jeho negace bude nepravdivá (0) a naopak.

A	$\neg A$
1	0
0	1

Pravdivostní ohodnocení $\neg A$

(Trlifajová & Vašata, 2013)

O negaci však nemůžeme hovořit jako o logické spojce v pravém slova smyslu, protože výroky nespojuje, ale upravuje.

Konjunkce

Konjunkci značíme symbolem $\wedge$, a odpovídá složení dvou výroků A , B za pomoci spojky „...a...“, „...i...“ a „...a zároveň...“. Tedy A a B , A i B , nebo A a zároveň B (Sochor, 2001).

Příklady konjunkcí výroků

a. $A \wedge B$: 2 je menší než 5 a Miloš Zeman je český prezident. (1)

b. $A \wedge C$: 2 je menší než 5 a je rok 2017. (0)

Je ale důležité znát definici: Konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá jen tehdy, pokud oba výroky A i B jsou pravdivé, tedy mají pravdivostní hodnotu 1. Ve všech ostatních případech je konjunkce nepravdivá. Viz následující tabulka.

A	B	$A \wedge B$
		1
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0



Pravdivostní ohodnocení $A \wedge B$. Disjunkce

Dalším spojkou, kterou používáme je disjunkce. Ta se značí symbolem $\vee$, který v přirozeném jazyce odpovídá spojce „...nebo...“. Tedy A *nebo* B . (Sochor, 2001)

Příklady disjunkce výroků

- $A \vee B$: 6 je menší než 10 nebo je Miloš Zeman český prezident. (1)
- $A \vee C$: 6 je menší než 10 nebo je rok 2011. (1)

Trlifajová uvádí, že disjunkce výroků A a B (tedy $A \vee B$), „je pravdivá pouze pro taková ohodnocení, při kterých je alespoň jeden z výroků A , B pravdivý.“ V ostatních případech, tedy v případě, že žádný z prvotních výroků není pravdivý, je disjunkce $A \vee B$ nepravdivá. (Trlifajová & Vašata, 2013, s. 13). Viz následující tabulka:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pravdivostní ohodnocení $A \vee B$

3.3.2 Implikace

Implikací rozumíme logickou spojkou, kterou označujeme $\Rightarrow$. Tato spojka je založena na vztahu předpokladu a závěru. Tedy $A \Rightarrow B$. A chápeme jako předpoklad a B jako závěr. V přirozeném jazyce slovně definujeme tuto spojkou pomocí: „*jestliže...*, *pak ...*“, „*z...*, *plyne...*“, „*když...*, *tak ...*“. (Trlifajová & Vašata, 2013, s. 13).

Implikace $A \Rightarrow B$ je nepravdivá právě v jednom případě, kdy výrok A je pravdivý a výrok B je nepravdivý. Laicky řečeno: implikace je nepravdivá právě tehdy, když z pravdy plyne nepravda. Pro ostatní ohodnocení je implikace pravdivá.

Je nutné podotknout, že člověk automaticky mezi předpokladem a závěrem hledá nějaký vztah. U implikace však může dojít i k situaci, kdy se mezi předpokladem a závěrem žádný vztah nevyskytuje. Trlifajová (2013) uvádí příklad:



„Jestliže $1 + 1 = 2$, pak je Země kulatá.“ Přestože mezi výroky nevidíme žádný logický vztah, je toto tvrzení pravdivé, neboť oba výroky jsou **pravdivé**.

„Jestliže $1 + 1 = 2$, pak je Země placatá.“ Je výrok **nepravdivý**, neboť se jedná o situaci, kdy z pravdy plyne nepravda. (Trlifajová & Vašata, 2013).

Příklady implikací výroků

- $A \Rightarrow B$: Jestliže 2 je menší než 5, pak je Miloš Zeman český prezident. (1)
- $A \Rightarrow B$: Jestliže 2 je menší než 5, pak je rok 2017. (0)

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Pravdivostní ohodnocení pro $A \Rightarrow B$. (Trlifajová & Vašata, 2013, s. 15).

Negace implikace

Jak už jsme zmínily, o negaci mluvíme tehdy, když měníme pravdivostní ohodnocení výroku. Kromě prvotních výroků můžeme negovat také výroky složené. „Negací implikace $A \Rightarrow B$ je konjunkce $A \wedge \neg B$ “ (Pártová, 2004).

Negace implikace se vždy tvoří na základě dané tabulky, kdy přesně vidíme, že sloupec negací implikace má tři 0 a jednu 1, což jasně dokazuje, že se nejedná o implikaci, ale konjunkci dvou výroků. Jelikož víme, že konjunkce je pravdivá pouze tehdy, když je složená ze dvou pravdivých výroků, musíme původní pravdivý výrok A nechat v původní podobě, a druhý nepravdivý výrok B znegovat, abychom dostali dvakrát pravdivostní hodnotu 1. Následně potom vznikne negace výroku $A \Rightarrow B$ je výrok $A \wedge \neg B$.

Tabulka. 1 (Trlifajová & Vašata, 2013, s. 13).

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg (A \Rightarrow B)$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1



0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0

Příklad negace implikace:

„Jestliže pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$, trojúhelník je pravoúhlý.“

Máme dva výroky:

A: Pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$.

B: Trojúhelník je pravoúhlý.

Výrok má tvar $A \Rightarrow B$, znegujeme na $A \wedge \neg B$. „Pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$ a trojúhelník není pravoúhlý.“

3.3.3 Ekvivalence

Dle Trlifajové: „ekvivalence dvou výroků odpovídá situaci, kdy mají oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu. V přirozeném jazyce ekvivalence odpovídá výrokům: *A právě tehdy, když B.*

A tehdy a jen tehdy, když B.

A je ekvivalentní s B.

Ekvivalenci A a B zapisujeme jako $A \Leftrightarrow B$, a je pravdivá právě tehdy, když oba výroky A i B mají stejnou pravdivostní hodnotu. Pro ostatní pravdivostní ohodnocení je nepravdivá. (Trlifajová & Vašata, 2013, s. 15).

Příklady ekvivalence výroků z 2.2.1:

- $B \Leftrightarrow C$: Miloš Zeman je český prezident právě tehdy, když je rok 2017. (0)
- $A \Leftrightarrow B$: 2 je menší než 5 tehdy a jen tehdy, když Miloš Zeman je český prezident. (1)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



Pravdivostní ohodnocení pro $A \Leftrightarrow B$. (Trlifajová & Vašata, 2013).

Celková pravdivostní tabulka.

Uvedená tabulka ukazuje všechny výrokové spojky, které jsme prezentovali výše.

3.4 Formule

Ve výrokové logice pracujeme s prvotními výroky, logickými spojkami a složenými výroky. Prvotní výroky (někdy zmiňované jako výrokové proměnné) zpravidla označujeme velkými tiskacími písmeny. V jazyce matematické logiky nemluvíme o těchto výrocích jako o výrocích, ale nazýváme je prvotními formulemi. (Trlifajová & Vašata, 2013). Výroková formule je tedy věta, která se skládá z výrokových proměnných, logických symbolů a závorek. Příkladem formule může být zápis: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg C \wedge A)$. Pravdivostním ohodnocením výrokové formule rozumíme tabulku pravdivostních hodnot, kterou jsme výše specifikovali. V rámci jazyka matematické logiky používáme:

- Symboly pro prvotní formule: $A, B, \dots$
- Symboly pro logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Závorky, které využíváme pro vyhnutí se nejednoznačností (Pártová, 2003).

Trlifajová (2013) definuje *formule výrokové logiky* jako: „posloupnost symbolů z jazyka výrokové logiky, která vznikne aplikací následujících pravidel:

- (i) Prvotní formule je formule.
- (ii) Jsou – li A a B formule, pak $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ jsou formule.

Nic jiného formule být nemůže.

- (iii) Každá formule vznikne pomocí pravidel (i) a (ii) v konečně mnoha krocích. (Trlifajová & Vašata, 2013, s. 13).

3.5 Atomický výrok

Jako atomický výrok chápeme výrok, který už nemůžeme více dělit. Výše jsme uváděli příklady složených výroků: „2 je menší než 5 nebo je rok 2017“. Tento výrok však obsahuje dva samostatné výroky, které jsou spojeny logickou spojkou. O atomických výrocích však mluvíme právě tehdy, když výrok už nemůžeme na žádné jiné výroky rozdělit, tudíž „se jedná v jistém smyslu o to nejjednodušší konstatování.“

**Příklady takových výroků:**

Bill Gates byl nejbohatší člověk na světě.

Přirozené číslo sedm je liché číslo.

Dva plus tři je šest.

3.6 Tautologie

Další ze situací, která může nastat, je tautologie. Klíč uvádí, že „tautologie je složený výrok, který je **vždy pravdivý**, nezávisle na pravdivostních hodnotách výroků, z nichž je složený výrok složen“ (Klíč, 2007, s. 280) Nejčastěji se dle něj uvádí tautologie:

$$A \vee \neg A$$

Slovně tuto tautologii vyjádříme takto: „*Bud' platí výrok A nebo jeho negace, třetí možnost není.*“ (Klíč, 2007 str. 280)

Příklad tautologie

1. 6 je menší než 10, anebo 6 není menší než 10.
2. Miloš Zeman je buď český prezident anebo Miloš Zeman není český prezident.
3. Je rok 2011 anebo rok 2011 není.

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
1	0	1
0	1	1

Tabulka tautologie. “ (Klíč, 2007, s. 280)

3.7 Kontradikce

O kontradikci mluvíme právě tehdy, když je nepravdivá pro každé ohodnocení. Jedná se tedy o výrokové formule, které jsou vždy nepravdivé.

Například: $A \wedge \neg A$ (Jedná se kontradikci, protože nemůže platit formule i její negace.)

Příklad kontradikce z 2.2.1:

1. 6 je menší než 10 a zároveň 6 není menší než 10.
2. Miloš Zeman je český prezident a zároveň Miloš Zeman není český prezident.



A	$\neg A$	$A \wedge (\neg A)$
1	0	0
0	1	0

Tabulka kontradikce.

3.8 Splnitelná formule

„Formule je splnitelná, právě když existuje ohodnocení, pro které je pravdivá.“ (Trlifajová & Vašata, 2013)

3.9 Kvantifikátory

Existují situace, kdy tvrzení, které dle matematické logiky nepovažujeme za výrok (např. $x > 3$), můžeme pomocí určitých nástrojů zpřesnit tak, aby se z nich výroky staly.

Hlavní problémem například u výroku: $x > 3$, je to, že přesně nevíme, co za dané x můžeme dosadit. Může to být číslo, věc, zvíře atd. Když však chceme upřesnit, že za dané x máme dosazovat číslo, zapíšeme to následovně: $x < 3, x \in \mathbb{R}$. Stále to ale není dostatečně upřesňující, neboť čísla můžeme doplňovat tak, že výrok bude pravdivý anebo nepravdivý. Pro dokonalé upřesnění se právě používají **kvantifikátory**.

Všeobecně platí, že rozlišujeme 2 typy kvantifikátorů:

1. **Velký kvantifikátor** (též nazývaný jako obecný)
2. **Malý kvantifikátor** (též nazývaný jako existenční)

(Bušek, 1999)

3.9.1 Velký kvantifikátor

Velký kvantifikátor značíme symbolem $\forall$ a čteme jej jako: „pro každé ...“. Tvrzení $x < 3, x \in \mathbb{R}$, bychom tak přečetli jako výrok: „Pro každé reálné číslo x platí, že $x > 3$.“ Pomocí tohoto kvantifikátoru přepíšeme tento výrok přepsat jako:

$\forall (x \in \mathbb{R}): x < 3$.

Nyní už máme výrok, který je však nepravdivý, neboť na místo x můžeme dosadit i čísla větší než tři (nebo tři) a výrok je tudíž neplatný (nepravdivý). Pravdivý by byl pouze v případě, že by uváděná vlastnost (být menší než 5) platila pro všechna reálná čísla.



Literatura charakterizuje tento vztah následovně: „*Obsahuje-li výrok proměnnou vázanou obecným kvantifikátorem, je pravdivý, pouze platí-li následující: Pokud za zmíněnou proměnnou do výrokového vzorce (vzniklého z výroku odebráním kvantifikátoru) dosadíme libovolnou hodnotu, již může tato proměnná nabývat, získáme vždy pravdivý výrok.*“ Dále upozorňuje na to, že pokud existuje alespoň jedna přípustná hodnota vázané proměnné, po jejímž dosažení do výrokového vzorce vznikne nepravdivý výrok, je celý i celý výrok s kvantifikátorem nepravdivý. Například v našem případě, dosadíme-li na místo x například číslo 10, získáme tak výrok: $10 < 3$. Jedná se o výrok nepravdivý, tudíž i celý výrok s kvantifikátorem je nepravdivý (Bušek, 1999).

3.9.2 Malý kvantifikátor

Mimo velký kvantifikátor existuje i kvantifikátor malý, jehož symbolem je: $\exists$.

Tento kvantifikátor čteme jako: „*existuje ...*“ nebo „*existuje alespoň jedno ...*“ Jasně tedy vidíme rozdíl, mezi velkým kvantifikátorem, který naznačuje, že vlastnost uváděná ve výrokovém vzorci musí nutně platit pro všechny možné varianty a hodnoty, a malým kvantifikátorem, který specifikuje určitou vlastnost právě pro jednu přípustnou hodnotu.

Moravec tuto skutečnost definuje: „*Obsahuje-li výrok proměnnou vázanou existenčním kvantifikátorem, je pravdivý pouze platí-li následující: Existuje alespoň jedna přípustná hodnota zmíněné proměnné, po jejímž dosažení do výrokového vzorce (vzniklého z výroku odebráním kvantifikátoru) získáme pravdivý výrok.*“ Pokud by tedy měl být výrok s tímto kvalifikátorem nepravdivý, nesmí potom z výrokového vzorce vzejít pravdivý výrok pro jakoukoliv jinou přípustnou hodnotu vázané proměnné. (Moravec, 2008)

Použijeme-li tedy stejný výrokový vzorec, ale s malým kvalifikátorem, dostaneme:

$$\exists(x \in \mathbb{R}): x < 3$$

Tento výrok čteme tedy následovně: „*Existuje reálné číslo x , které je menší než 3.*“ Nyní jsme už přesně získali pravdivý výrok, neboť číslo, které je menší než 3 jasně existuje. Dostaneme například výrok: $1 < 3$. (Moravec, 2008)



4 MNOŽINY

Podle G. Cantora (1845 – 1918), zakladatele teorie množin, je množina souhrn objektů, které jsou přesně určené a rozlišené a tvoří součást světa našich představ a myšlenek. Tyto objekty nazýváme prvky množiny.

Množina je tedy souhrn libovolných prvků, které jsou přesně definovány. Prvky, které množina obsahuje, jsou nazývány prvky množiny a jsou chápány jako celek. Matematické máme na mysli prvky, které jsou značeny matematickými znaky. V reálném životě to mohou být prvky, které identifikujeme jako prvek množiny. Př. Množina zvuků, pohybů...

4.1 Značení množin

V matematice **množiny** značíme **velkými tiskacími písmeny** (např. **M, Z, Q, R,...**) a jejich **prvky** malými písmeny (např. **x, y, a, b,...**).

Chceme-li zapsat, že prvek **x** je **prvkem množiny M**, značíme tento vztah:

$$x \in M \qquad \text{nebo} \qquad M = \{ x \}$$

Chceme-li zapsat, že prvek **x** **není prvkem množiny M**, značíme tento vztah: $x \notin M$

Pokud máme zápis: $M = \{\emptyset\}$, neznamená to, že množina M neobsahuje žádný prvek, tudíž je prázdnou množinou. Znamená to, že množina M obsahuje prázdnou množinu. Množina, která obsahuje aspoň jeden prvek, se nazývá „*neprázdna množina*“.

4.2 Určení množiny

Charakteristickou vlastností množiny je to, že je přesně a jednoznačně definována. Toto definování může probíhat dvěma způsoby.

4.2.1 Definování množiny výčtem jejích prvků

Pokud množinu definujeme výčtem jejích prvků, znamená to, že vypíšeme všechny prvky, které patří do dané množiny.

Například množinu A, která obsahuje prvky 1; 2; 5; 8, vyjádříme jako: $A = \{1; 2; 5; 8\}$

Při zadání množiny výčtem jejích prvků nezáleží na tom, v jakém pořadí prvky zapisujeme. To znamená, že množina $A = \{1; 2; 5; 8\}$ je totožná s množinou $A = \{8; 5; 2; 1\}$.



4.2.2 Definování množiny pomocí charakteristické vlastnosti

Pokud množinu definujeme pomocí charakteristické vlastnosti, musíme určit vlastnost, která je charakteristická pro všechny prvky patřící do dané množiny.

Například množina A obsahuje všechny samohlásky. Taková množina potom obsahuje prvky $\{a, e, i, o, u, y\}$. Pokud zapíšeme jako $A = \{a, e, i, o, u, y\}$, dostaneme zápis množiny daný výčtem prvků.

4.3 Podmnožina množiny

Množina, která je podřazená, pod množinu nadřazenou je nazývána podmnožina množiny. Značíme $A \subset B$. Protože každý prvek libovolné množiny A je prvkem množiny A , je každá množina A podmnožinou sebe sama. Tento vztah zapisujeme: $A \subset A$

4.4 Rovnost množin

O množinách A a B řekneme, že se rovnají právě tehdy, když obě obsahují tytéž prvky. Tento vztah zapisujeme: $A = B$

Množiny A , B se rovnají jedině tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a také každý prvek množiny B je prvkem množiny A . Tato vlastnost se využívá při dokazování rovnosti množin. Chceme-li dokázat, že se množiny A , B rovnají, dokážeme jednak, že $A \subset B$ a také že $B \subset A$ (Partová, 2004).



5 OPERACE MEZI MNOŽINAMI

Mezi množinami můžeme provádět různé množinové operace. Mezi nejzákladnější patří:

- sjednocení množin
- průnik množin
- rozdíl množin
- doplněk množin (Pártová, 2004)

5.1 Sjednocení množin

Sjednocením množin A , B vznikne nová množina, která obsahuje všechny prvky jak množiny A , tak i množiny B . Tento vztah značíme: $A \cup B$

Příklady:

1. Máme 2 množiny: $A=\{1; 3; 5; 7\}$, $B=\{2; 4; 6\}$.

Značíme: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

2. Máme 2 množiny: $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{2; 3; 4\}$

Značíme: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$

Prvky 2; 3 nebudou ve výsledné množině 2x, protože množina neobsahuje jeden stejný prvek vícekrát.

Pokud sjednotíme dvě stejné množiny, dostaneme zase tutéž množinu. Tento vztah značíme:

$$A \cup A = A$$

Sjednocení dvou množin je komutativní, což znamená, že nezáleží na pořadí množin při sjednocování. Znamená to: $A \cup B = B \cup A$

Pokud sjednocujeme množinu A s množinou, která neobsahuje žádné prvky, tedy s množinou prázdnou, výsledná množina bude rovna množině A . Znamená to: $A \cup \emptyset = A$



5.2 Průnik množin

Průnikem množin A , B vznikne nová množina, která obsahuje takové prvky, které se nachází jak v množině A , tak i v množině B . Nová množina bude tedy obsahovat prvky, které jsou pro množinu A i pro množinu B společné. Tento vztah značíme: $A \cap B$

Příklady:

1. Máme 2 množiny: $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$

Značíme: $A \cap B = \{5; 7\}$

2. Máme 2 množiny: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{f, g, h, i, j, k\}$

Značíme: $A \cap B = \{\}$ nebo $A \cap B = \emptyset$

Tyto množiny nemají žádný společný prvek, tudíž průnikem množin je prázdná množina.

Pokud máme dvě stejné množiny, jejich průnikem je opět stejná množina. Tento vztah značíme: $A \cap A = A$

Průnik množin je komutativní, což znamená, že nezáleží na pořadí jednotlivých množin. Tento vztah značíme: $A \cap B = B \cap A$

Pokud máme množinu A a prázdnou množinu, jejich průnikem bude prázdná množina, jelikož množina, které neobsahuje žádný prvek, nemůže mít ani jeden společný prvek s množinou A . Tento vztah značíme: $A \cap \emptyset = \emptyset$

5.3 Rozdíl množin

Rozdílem množin A , B vznikne taková množina, která bude obsahovat všechny prvky množiny A , a zároveň nebude obsahovat žádný z prvků množiny B . Tento vztah značíme: $A - B$ nebo $A \setminus B$

Příklady:

1. Máme 2 množiny: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7; 8\}$

Značíme: $A \setminus B = \{1; 2; 3\}$



Jsou to ty prvky, které nám zůstanou, pokud z množiny A odstraníme všechny prvky, které jsou obsaženy v množině B

Pokud odečítáme dvě stejné množiny, podobně jako při odečítání dvou stejných čísel, dostaneme prázdnou množinu. Tento vztah značíme: $A \setminus A = \emptyset$

Pokud od množiny A odečteme prázdnou množinu, výsledkem je opět množina A . Tento vztah značíme: $A \setminus \emptyset = A$

5.4 Doplněk množiny

Abychom spočítali doplněk množiny A , potřebujeme vědět, v jaké množině tento doplněk počítáme. Doplněk množiny představuje všechny prvky, které nejsou v množině A . Jedná se tedy o jakýsi opak množiny A . Doplněk značíme: $\bar{A}$

Příklady:

1. Máme-li jako hlavní množinu $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, pak doplněk množiny $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ v M , bude obsahovat všechny prvky množiny M , které nejsou obsaženy v množině A . Tedy $\bar{A} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

Můžeme tedy říct, že $\bar{A}$ v M je rovno $M \setminus A$.

5.5 Vlastnosti množiny

1) KOMUTATIVNOST:

Pro všechna reálná čísla platí komutativní zákon (věta) pro sčítání a násobení.

$$x + y = y + x \text{ (komutativnost sčítání)}$$

$$x * y = y * x \text{ (komutativnost násobení)}$$

2) ASOCIATIVNOST

Pro všechna reálná čísla platí asociativní zákon (věta) pro sčítání a násobení.

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ (sčítání)}$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \text{ (násobení)}$$



6 BINÁRNÍ RELACE

Relace je matematický pojem, který vyjadřuje vztah mezi dvěma prvky v množině. Příklad: Pokud ve vztahu dvou žen je Monika matka a Jitka dcera = vztah „matka – dcera“.

Arita relace

Arita = termín, který vystihuje, kolik prvků v relaci máme. Pro určení tohoto vztahu je potřeba definovat prvky v základní množině a tedy, prvky, u kterých budeme relaci určovat.

Unární (jeden prvek)

Binární (dva prvky)

Ternární (tři prvky)

6.1 Binární relace

Vyjadřuje vztah prvků jedné množiny k prvkům v množině druhé. Určujeme zde vždy vztah mezi dvěma prvky. Mezi typické binární relace patří: **menší než, rovnost, dělitelnost, větší než**, apod.

Binární relaci R mezi množinami $M1$ a $M2$ můžeme definovat takto: $R \subseteq M1 \times M2$. Binární relace je tak množina dvojic, přičemž tato množina je podmnožinou kartézského součinu dvou množin, mezi kterými relaci zavádíme (Pártová, 2004).

1. Vyhledejte všechny relace „otec – syn“

Max: dědeček

Josef: otec

Honza: syn

2. Definujte binární relaci „menší než“ prvků z $\{A\}$ k prvkům z $\{B\}$

$\{A=(2,5,9)\}$

$\{B=(1,4,6)\}$.



Příklady:

1. Vyhledejte všechny relace „otec – syn“

Max: dědeček

Josef: otec

Honza: syn

2. Definujte binární relaci „menší než“ prvků z $\{A\}$ k prvkům z $\{B\}$

$\{A=(2,5,9)\}$

$\{B=(1,4,6)\}$.



ZÁVĚR

Historie a vývoj matematiky je velmi zásadní pro pochopení matematických operací, které realizuje dítě předškolního věku v edukaci mateřské školy. Matematika se zrodila z dialogu (Kvasz, 2016). Ontogeneze tohoto oboru předurčuje práci učitele v mateřské škole zakládat na dialogické interakci s dítětem. Oblast množin a binárních relací pak pokládá základ pro identifikaci prvků kolem dítěte a následně pak charakteristiku jejich vztahu. Ale nejen to, dítě samo dokáže na základě nápodoby a samostatné manipulace s předměty pojmenovávat předměty kolem sebe a vztahy, které mají mezi sebou.



SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Bokr, J. & SVATEK, J. (2000). *Základy logiky a argumentace pro zájemce o umělou inteligenci, filozofii, práva a učitelství*. Dobrá Voda u Pelhřimova: A. Čeněk.
- [2] Bušek, I. & Calda, E. (1999). *Matematika pro gymnázia: základní poznatky*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus.
- [3] Hejtný, M. (2009). *Dítě, škola, matematika*. Praha: Portál.
- [4] Kaslová, M. (2010). *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. Praha: Raabe.
- [5] Kašparová, J., Starý, K. & Šumavská, Z. (2011). *Výukové strategie v praxi pilotních odborných škol*. Praha: Národní ústav pro vzdělávání.
- [6] Klíč, A. & kol. (2007). *Matematika I ve strukturovaném studiu*. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2007
- [7] Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konstruktivismu. *Orbis scholae* (10)2, 15 – 46.
- [8] Moravec, L. (2008). *Webová aplikace pro výuku matematické logiky na střední škole*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2008. Dostupné z: <http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/moravecdp/kvantifikatory.php>.
- [9] Pártová, E. (2004). *Relácie a ich aplikácia v predškolskej matematike*. ASCO art & science.
- [10] Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus.
- [11] Sochor, A. (2001). *Klasická matematická logika*. Praha: Karolinum.
- [12] Sochor, A. (2011). *Logika pro všechny ochotné myslet*. V Praze: Univerzita Karlova.
- [13] Šedivý, J. (1984). *Světónázorové problémy matematiky II*. Praha: SPN.
- [14] Šedivý, J., Lukátšová, J., Odvárko, O., & Zöldy, M. (1970): *Úlohy o výrocích a množinách pre 1. ročník gymnázia*. Bratislava: SPN.
- [15] Trlifajová, K. & Vašata, D. (2013). *Matematická logika*. V Praze: České vysoké učení technické.
- [16] Zavřel, K. (2010). *Historie logiky jako inspirace pro vyučování matematiky*. Bakalářská práce. Praha: Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta.
- [17] Zouhar, M. (2008). *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Bratislava: Veda, vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied.